

本册按《普通物理学》(第七版)(上册)、《中学奥林匹克竞赛物理教程(电磁学篇)》进行编写,并结合编者长期物理学实践,尝试给出更易于理解的概念解释,致力于为自学或对物理感兴趣的学者提供便利。本册无法充当教材的作用,阅读本册需要一定的物理学基础。

## 一、静电场

### 1.1 电荷定义

1C 等于导线中的恒定电流等于 1A 时,在 1s 内通过导线横截面的电荷量。

### 1.2 电荷守恒定律

在一个与外界没有电荷交换的系统内,无论经过怎样的物理过程,系统内正、负电荷的代数和总是保持不变。

### 1.3 库仑定律

真空中两个静止的点电荷之间的受力  $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , 方向在两个点电荷的连线方向上(正数表示连线方向朝外)。

其中常数  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , 由于  $\epsilon_0$  在电磁学中更常见, 上式可以写作  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ 。

库仑定律是一条实验定律。

### 1.4 静电场叠加原理

作用在某一点电荷上的总静电力等于其它各点电荷单独存在时对该点电荷所施静电力的矢量和,

$$\text{即 } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i.$$

### 1.5 电场、静电场

场是空间中传递能量的一种介质,电荷周围存在的场称为电场,电荷对电荷的作用力本质上是通过电荷产生的电场对另一个电荷作用产生的电场力。

静止的电荷在其周围产生的电场称为静电场。

### 1.6 电场强度

电场强度(场强)是描述电场大小和方向的物理量。

由一个点电荷在空间激发的电场强度  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$ , 其中  $q_0$  为试探电荷,  $\mathbf{F}$  为该点电荷对试探电荷的静电力, 显然  $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ , 只与点电荷的电荷大小和离点电荷的距离有关。

多个点电荷在空间中产生的电场强度也满足叠加原理:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \hat{\mathbf{r}}_i$$

需要注意的是每一个  $r_i$  参照的点电荷是不同的。

### 1.7 电场对电荷的作用

由  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$  不难得到，在一个电场中，一个点电荷受到的电场力  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 。

### 1.8 通量的概念

在电磁学领域中，通量实际上指的是空间中穿过某一个面的矢量的累加，是一个标量。我们将矢量  $\mathbf{v}$  正交分解成垂直于一个面的  $\mathbf{v}_n$  和平行于一个面的  $\mathbf{v}_\tau$ （如果是曲面的话，“一个面”指的就是  $\mathbf{v}$  穿过这个曲面对应处的面微元），那么实际上通量的值就是  $v_n S$ ，平行的矢量不会通过。

定义面积为矢量，大小为面积大小，方向为面积微元的法线方向。那么通量的计算式就是矢量和面积的点积，即  $d\psi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ 。

### 1.9 电通量

电场强度通量，简称电通量，指的是穿过一个面的场强的累加，即  $d\psi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S ES \cos\theta$ ，

其中  $\theta$  为场强方向和面法线方向上的夹角。

计算通过一个曲面的通量时，往往需要使用积分。

### 1.10 高斯定理

我们规定一个闭合曲面的方向朝外是正向，以面内都为正电荷为例，显然这个面内部产生一切电场，如果想要“逃逸”出这个面，所产生的通量也只与这个曲面内部的电荷有关。

如果空间中只有一个点电荷，取以他为心的任意球面，那么它所产生的所有电场线必然会“逃逸”出这个面，穿过这个面的通量为  $\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ 。结果只与电荷量有关。如果这个面发生畸变、点电荷在闭合面的位置发生移动，那么它所产生的电场线也依旧会穿过这个面，正因如此，该点电荷在这个面上产生的全部电场强度都可以在这个面上找到与它垂直的面微元，此时则将面微元视为球面的一部分，满足上式，积分后通量依旧是  $\frac{q}{\epsilon_0}$ 。即通量与曲面形状和点电荷位置都无关。

在闭合曲面内引入多个点电荷，显然有通量为  $\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ ，由此得到高斯定理：

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

表示闭合曲面内产生的电场，穿过该闭合曲面的通量只与闭合曲面内的总电荷量有关。面内有正电

荷，有电场线穿出该面，贡献正的通量；面内有负电荷，有电场线穿进该面，贡献负的通量。

应用高斯定理时，我们时常会称面 $S$ 为“高斯面”。

### 1.11 利用高斯面求真空中电场强度及典例举要

如果所选高斯面在任意位置都与该位置的电场线垂直，那么有 $d\psi_E = E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq$ ，不难求出

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS}$$

#### (1) 无限长均匀带电直线

设电荷线密度为 $\lambda$ ，表示单位长度的带电量。

取一个半径为 $r$ 、高度为 $dh$ 、轴线与带电直线重合的闭合圆柱面为高斯面。由于无限长的特性，在距离直线 $r$ 处产生的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理：

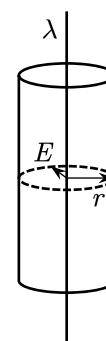
$$dS = 2\pi r dh$$

$$dq = \lambda dh$$

$$E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

解得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



#### (2) 无限长均匀带电平面

设电荷体密度为 $\sigma$ ，表示单位面积的带电量。

在距离无限长均匀带电平面 $r$ 处取一个轴线垂直于该面、中心在该面上的高为 $2r$ 、截面面积为 $dS$ 的闭合圆柱面为高斯面。由无限长的特性，距离带电平面 $r$ 处的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理：

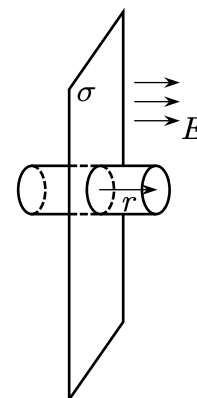
$$dq = \sigma dS$$

$$2E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

解得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

与 $r$ 无关，故无限长均匀带电平面在它的两侧产生匀强电场。



#### (3) 无限长均匀带电圆柱面

设电荷体密度为 $\sigma$ ，表示单位面积的带电量；圆柱面的半径为 $R$ 。

取一个半径为 $r$ 、高为 $dh$ 、轴线与带电圆柱体重合的闭合圆柱面为高斯面。由于无限长和圆柱面的对称性，在距离轴线 $r$ 处的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理：

当  $r < R$  时, 内部电荷量为 0, 则  $E = 0$ .

当  $r \geq R$  时,

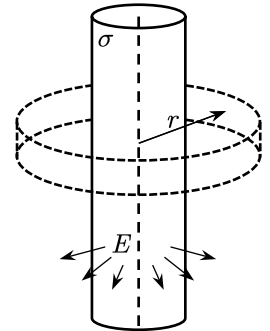
$$dq = \sigma 2\pi R dh$$

$$dS = 2\pi r dh$$

$$E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

解得

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$



注: 如果给定的是单位长度的圆柱面带电量是  $\lambda$ , 则  $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$ , 代入上面的

结果有:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

与无限长均匀带电直线比较, 可见当  $E$  时, 无限长均匀带电圆柱面可视为带等量电荷的无限长均匀带电直线 (在轴线处)。

#### (4) 无限长均匀带电圆柱体

设电荷体密度为  $\rho$ , 表示单位体积的带电量; 圆柱体的半径为  $R$ .

取一个半径为  $r$ 、高为  $dh$ 、轴线与带电圆柱体重合的闭合圆柱面为高斯面由于无限长和圆柱的对称性, 在距离轴线  $r$  处的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理:

当  $r < R$  时,

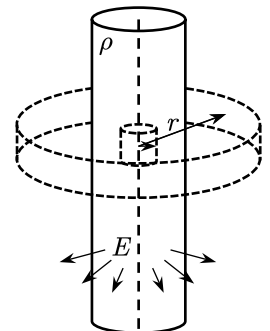
$$dq = \rho \pi r^2 dh$$

$$dS = 2\pi r dh$$

$$E dS = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

解得

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$



当  $r \geq R$  时,  $dq = \rho \pi R^2 dh$ , 从而

$$E = \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

注: 如果给定的是单位圆柱长度的带电量是  $\lambda$ , 则  $\rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$ , 代入上面的结果有:

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r, & r < R \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

### (5) 均匀带电球壳

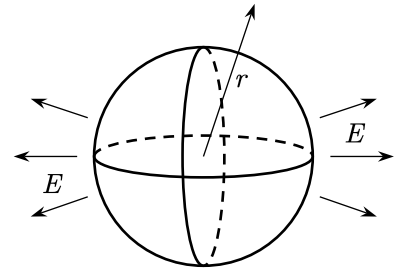
设电荷体密度为 $\sigma$ ，表示单位面积的带电量；球面的半径为 $R$ 。

取一个同心的半径为 $r$ 的球面为高斯面，由球的对称性可得在该高斯面上的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理：

当 $r < R$ 时，内部电荷量为0，则 $E = 0$ 。

当 $r \geq R$ 时，

$$\begin{aligned} q &= \sigma \cdot 4\pi R^2 \\ S &= 4\pi r^2 \\ ES &= \frac{1}{\epsilon_0} q \end{aligned}$$



解得

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

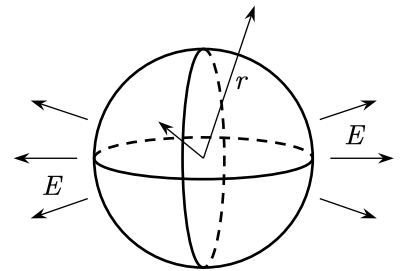
### (6) 均匀带电球体

设电荷体密度为 $\rho$ ，表示单位体积的带电量；球体的半径为 $R$ 。

取一个同心的半径为 $r$ 的球面为高斯面，由球的对称性可得在该高斯面上的电场大小处处相等。对该高斯面应用高斯定理：

当 $r < R$ 时，

$$\begin{aligned} q &= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \\ S &= 4\pi r^2 \\ ES &= \frac{1}{\epsilon_0} q \end{aligned}$$



解得

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

当 $r < R$ 时， $q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ ，从而

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

## 1.12 电势能、电场力做功

电势能场与其它势能场一样，是保守场，电场力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 做功的本质是电势能 $E_P$ 的变化，因此电场

力是保守力，电场力做功与路径无关。

对于一个在电场  $\mathbf{E}$  中的试探电荷  $q_0$ ，从位置  $a$  移动到位置  $b$ ，电场力做功等于势能的减少量：

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_P = E_{Pa} - E_{Pb} \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

对于单个点电荷  $q$  产生的电场，取无穷远处势能为 0，将试探电荷  $q_0$  从距离点电荷  $r$  处移至无穷远，电场力做功为

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_P = E_{Pr} - 0 \\ &= \int_r^{+\infty} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \end{aligned}$$

则试探电荷在距离点电荷  $r$  处产生的电势能为  $E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$ 。

### 1.13 电势、电势差

空间中某点的电势为试探电荷在该点的电势能与电荷量的比值，即电势  $\varphi = \frac{E_P}{q_0}$ 。

单个点电荷  $q$  的电势分布为  $\varphi = \frac{E_P}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ 。

空间中的两点存在电势差  $U = \Delta\varphi$ 。将一个试探电荷  $q_0$  从  $a$  移动到  $b$ ，它的电势变化为

$$U_{ba} = \Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a = \frac{E_{Pb}}{q_0} - \frac{E_{Pa}}{q_0}$$

电场力做功可以用电势差来表示，也可以用电场力在空间的积分来表示：

$$W = E_{Pb} - E_{Pa} = q_0 U_{ba} = -q_0 U_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

得到：

$$\begin{aligned} U_{ab} &= - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi \end{aligned}$$

电势和电势能的关系，如同电场强度和电场力的关系。电势和电场强度都是描述电荷产生的场的物理量，电势描述的是势能场，电场强度描述的是静电场。电势在空间的梯度反映的是电场强度，电势差反映的是电场力做功。

### 1.14 环路定理

试探电荷  $q_0$  经过闭合路径  $L$ ，由于电场力是保守力，电场力所作的功总和为零，即  $q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

由上式可得静电场的环路定理：

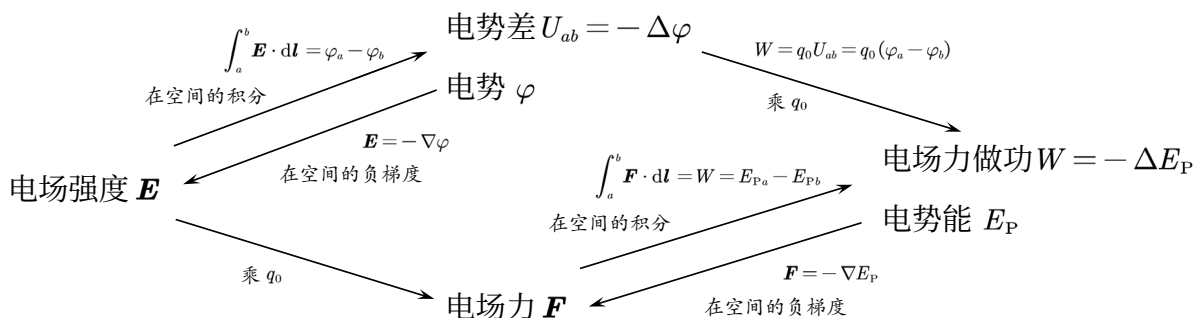
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

### 1.15 等势面

等势面指的是空间中所有电势相同的点构成的面。由电场强度是电势减少的梯度可以得到，空间中某点的场强必然垂直于等势面，电场线在每点的切线必然垂直于该点电势的等势面。

显然，试探电荷在同一等势面具有相同的势能，起点和终点都位于同一等势面的运动中电场力净不做功。

### 1.16 静电场物理量综述



### 1.17 封闭导体电荷面密度与场强的关系

设一个封闭导体曲面某点处的电荷面密度为  $\sigma$ ，由高斯定理得，如果导体内部没有任何电荷，则导体内部场强为 0，即电势不存在梯度，等势。则导体内部无电场线，电场线只存在于导体外。

在点附近取一个轴线垂直于该点附近平面的圆柱面为高斯面，电场线只穿过圆柱位于导体外的底面，由高斯定理得  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma d\mathbf{S}}{\epsilon_0}$ ，解得

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

方向垂直导体平面向外。这就是带电导体表面某点附近的电场强度和该点电荷面密度的关系。

### 1.18 静电感应、尖端放电

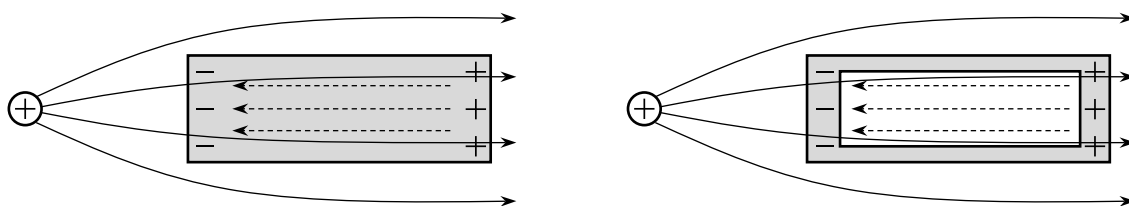
当一个带电体靠近一个中性物体时，带电体所带的电荷会改变这个物体的电荷分布，正负电荷相互吸引，同性电荷相互排斥。

如果一个中性物体具有尖端，以一个带正电的物体为例，将该带电体靠近该尖端，会在尖端感应出负电荷（中性物体的负电荷向尖端移动、正电荷向尖端远离），尖端面积小、电荷密集，电荷密度大，附近电场强度大，电势梯度高，尖端与带电体的电势差大（电压高），使得空气被“击穿”，从而出现尖端放电的现象。

### 1.19 静电屏蔽

在静电平衡的情况下，一个闭合导体系统内部的电场分布不受外电场的影响。

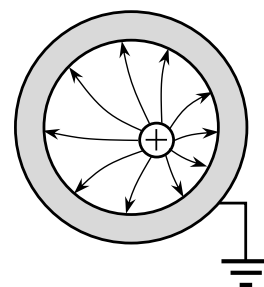
如下图所示，不管是导体还是闭合的空腔导体，在没有静电场时，它们的内部都是等势体。当外部一个带电体靠近它们时，会改变导体的电荷分布。



但是，外界带电体产生的电场和感应出的电荷所产生的电场，在导体内部的总和仍然为 0，这说明导体内部依然等势。根据叠加原理，此时在空腔导体的内部放置电荷，空腔内部的电场分布与没有外界带电体时的电场分布已知。

所以，在导体自身**静电平衡**的条件下：实心导体内部等势，空腔导体外面的带电体不会影响空腔内部的电场分布。

如果对空腔导体的外壳接地，那么空腔导体的电势就始终等于 0，这就形成了一个屏蔽层，隔绝了该等势面内外的电场：空腔导体内外的电场变化不会改变对方的电场分布情况。这种现象成为**静电屏蔽**。



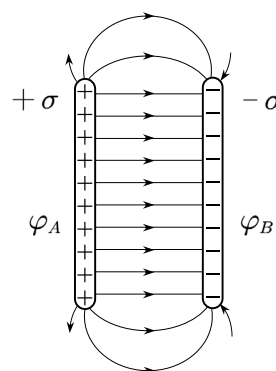
## 1.20 电容器、电容

电容  $C$  指的是一个孤立导体的电势  $U$  与它所带电荷量  $Q$  的关系，即  $C = \frac{Q}{U}$ 。合适的孤立导体可以用于存储电荷，成为电容器。

### 1.21 真空中常见电容器电容举要

#### (1) 平行板电容器

平行板的线度远大于平行板之间的距离，平行板除边缘外可以近似为无限长的平面。设板上均匀分布电荷面密度为  $\sigma$ ，由高斯定理得，正极板在电容左侧产生  $E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 、板间和电容右侧产生  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  的电场（以右为正方向），负极板在电容左侧和板间产生  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 、电容右侧产生  $E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  的电场。事实上，两板各自产生的匀强电场在电容外被抵消，只有电容两板之间存在匀强电场，电场强度  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 。



定义板的正对面积为  $S$ ，板的间距为  $d$ ，沿电场线方向有：

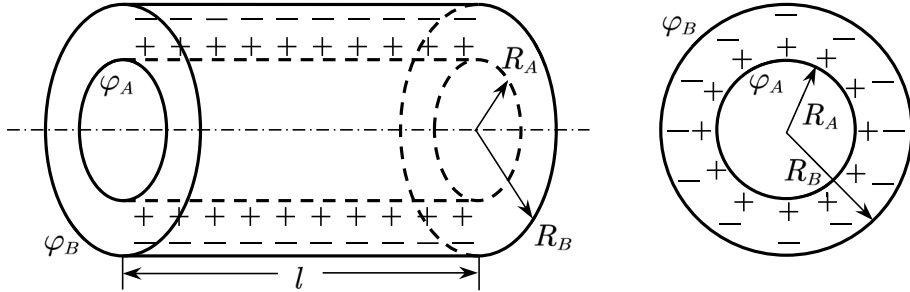
$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$



则

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

### (2) 圆柱形电容器



设内板带正电荷，外板带等量负电荷，圆柱板长为 $l$ ，单位长度的圆柱面带电量为 $\lambda$ 。当两板间距远小于圆柱的高时，可近似认为是两个同轴的无限长带电圆柱面。由高斯定理得距离轴心 $r$ 处

$$(R_A < r < R_B) \text{ 处的电场强度为 } E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{\lambda \Delta l}{2\pi r \Delta l \cdot \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

沿电场线方向有

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

则

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$$

### (3) 球形电容器

设内球壳带正电，外球壳带负电，带电电荷量为 $q$ ，高斯定理易得距离球心 $r$ 处 ( $R_A < r < R_B$ ) 处的电场强度为

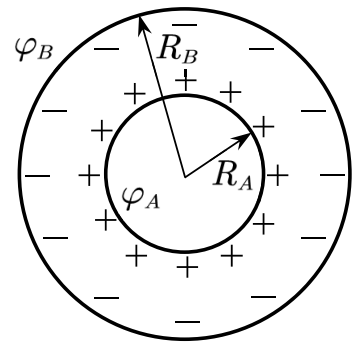
$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

沿电场线方向有

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

则

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_A - R_B}$$



## 1.22 电容的串并联

电容器的串并联等效电容规律恰好与电阻串并联等效电阻规律相反。

### (1) 平行板电容器串联

当多个电容器串联在一起时，由于各个极板都被导线连通，电容器所带电量是相同的，设为 $q$ ，当其中一个电容器的带电量变化时，其它电容器也会发生改变，没有一个电容器的带电量并不是独立的，故串联电容器带电量为 $q$ 。那么有

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{q}{C_n}$$

则串联电容器两端的总电压

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

两边同除以 $q$ ，由串联电容 $C = \frac{q}{U}$ 得

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

即平行板电容器串联的等效电容器电容的倒数等于各电容器电容的倒数之和。

### (2) 平行板电容器并联

当多个电容器并联在一起时，他们的电压是相同的，设为 $U$ ，由 $Q = CU$ 得，它们所带的电荷量是不同的，每个电容的电荷量是彼此独立的，有

$$q_1 = C_1 U, q_2 = C_2 U, \dots, q_n = C_n U$$

并联电容器的总带电量

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U$$

由并联电容 $C = \frac{q}{U}$ 得

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

即平行板电容器并联的等效电容器电容等于各电容器电容之和。

## 1.23 电偶极矩、电极化

电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 。 $q$ 表示一个静电平衡系统内全部正电荷或负电荷的总电荷量， $\mathbf{l}$ 表示全部正电荷中心和全部负电荷中心之间的距离，方向从负电荷指向正电荷； $\mathbf{l}$ 也称为负电荷到正电荷的位移矢量。

显然，将一个分子看成一个系统，有极分子本身具有电偶极矩。当分子处在外电场中，有极分子通过旋转等使它的电偶极矩与电场方向对齐，这个过程称为**极化**，有极分子的这种极化称为取向极化；而无极分子本身不具有永久电偶极矩，难以“畸变”，因此使无极分子若要产生极化，需要更大的电场强度来诱导产生电偶极矩（使正负电荷中心分离）。

倘若将电场力比作空间中方向恒定的风，使一个棍状橡皮泥（棍的两端代表正负电荷中心）发生旋

转，显然要比相同条件下将球状橡皮泥吹成棍状并旋转更容易。

### 1.23 电介质、电极化强度

电介质是一种电绝缘材料，不允许自由电荷流动，但能够在外加电场中极化。

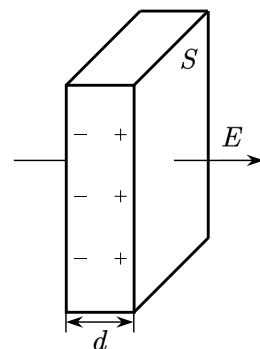
当存在电介质时，电介质内某点附近（取体积微元 $\Delta V$ ，体积内仍有大量分子）的电极化强度

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V},$$

用于描述电介质中因外部电场作用而产生的电偶极矩的体密度。

考虑一个面积为 $S$ 、厚为 $d$ 的电介质薄片，施加垂直于薄片的电场 $\mathbf{E}$ ，薄片两表面会产生极化电荷（总极化电荷量为 $q'$ ），正电荷在电场力的作用下沿电场线方向移动，负电荷沿电场线方向相反移动，那么电极化强度的方向与电场

强度方向相同，大小为 $P = \frac{\sum q}{Sd} = \frac{q'd}{Sd} = \frac{q'}{S} = \sigma$ 。我们发现极化电荷的面密度恰好等于电极化强度。



更一般的情况，如果电介质表面不规则，或电场强度不垂直于某点附近的面，该点附近极化电荷的面密度应当等于该点沿电场线方向在法向量的分量，即 $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = P_n$ 。

### 1.24 有电介质时的静电场

有了极化电荷，由叠加原理，在电场 $\mathbf{E}_0$ 作用下的合场强就需要多加一个由极化电荷产生的场强 $\mathbf{E}'$ ，我们可以形象地将其称为“极化场强”。显然我们有合场强

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

产生的合场强会进一步影响极化的强度，这一过程在物理中很快达到稳定。我们可以通过一个无量纲的系数 $\chi_e$ 来表示某电介质的**电极化率**，它表示极化场强大小占合场强大小的比例，即 $\chi_e = \frac{E'}{E}$ 。在电介质某点合场强 $\mathbf{E}$ 已知的情况下，通过电极化率可以得到该点的电极化强度 $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$ 。

### 1.25 电位移

在不存在电介质时，空间中一个电场 $\mathbf{E}$ 对应的电位移（电位移矢量）为 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ 。当存在电介质时，电位移矢量表示“消去”极化现象后的原电场强度。

有电介质时，对电极化强度 $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$ 代入 $\chi_e = \frac{E'}{E}$ ，得 $\mathbf{P} = -\varepsilon_0 \mathbf{E}'$ （ $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{E}'$ 方向相反），可见电极化强度就是极化电荷产生的电位移，所以电位移矢量的表达式可以写成

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E}' = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

相对于真空介电常数 $\varepsilon_0$ ，定义相对介电常数 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ ，且介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ，则

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\text{原电场强度 } \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$

由  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{E + E'}{E} = \frac{E_0}{E}$  ( $E'$  的方向与  $E$  和  $E_0$  的方向反向), 可以将相对介电常数理解为原

场强占合场强的比例系数。

在现实中, 人们观测到的往往是合场强  $\mathbf{E}$ , 极化现象有时可能会被认为是一种干扰, 例如高斯定理的应用时则需要多考虑极化电荷等。电位移矢量用于在已知合场强的基础上消去“感应”出的极化电荷的影响, 以得出极化前的场强, 便于维持未极化状态下的公式、计算等。因此我们可以形象地称  $\mathbf{E}_0$  为“本真场强”, 电位移矢量正是反映“本真场强”的物理量。

此外, 相较于磁学中的磁场强度和磁感应强度, 在与电场强度  $\mathbf{E}$  的比较下, 电位移矢量可以称为“电感应强度”。

### 1.26 有电介质时的平行板电容器电容

当平行板电容器处在电介质之中时, 平行板电容器之间激发的电场强度会使两板之间极化产生极化电荷, 从而改变合场强大小。设平行板正对面积为  $S$ 、间距为  $d$ 。设平行板的原电荷面密度为  $\sigma_0$ , 产生的场强为  $\mathbf{E}_0$ ; 极化电荷面密度为  $\sigma'$ , 产生的场强为  $\mathbf{E}'$ 。

取原场强方向为正方向, 由高斯定理有

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad E' = -\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

合场强

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} \\ &= E_0 + \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E \end{aligned}$$

解得

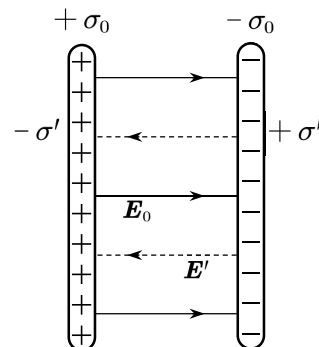
$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

两极板的电势差

$$U = \int_0^d E dl = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

根据电容的定义, 电容大小中的电荷量是我们期望存储的电荷量, 而并不是电容极板上真正带的电荷量。当电容放电时, 极板上电荷量减少, 电荷面密度减少, 合场强减小, 极化电荷也会减少直至 0, 最后放出的电量  $q$  与充入的电量一致, 为  $q = \sigma_0 S$ 。则电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$



设不存在电介质时的电容为  $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ ，我们有

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

在此处， $\varepsilon_r$  又可以称为电容率。

### 1.27 有电介质时的高斯定理

设合场强为  $\mathbf{E}$ ，极化电荷产生的场强为  $\mathbf{E}'$ ，消去“极化场强”后的“本真场强”为  $\mathbf{E}_0$ 。

不存在电介质时， $\mathbf{E}' = 0$ ， $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ ，高斯定理为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

存在电介质时的高斯定理为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q_0 + \sum q')$$

由叠加原理也易于得到

$$\oiint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_0$$

$$\oiint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q'$$

不考虑极化电荷的高斯定理，由  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$ ，显然我们有

$$\oiint_S \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_0$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

这就是有电介质时的高斯定理。

### 1.28 有电介质时的环路定理

不管是静电场还是极化电荷激发的电场，它们都是静电场，亦即保守场，电场强度沿环路积分回到原点的电势差仍为 0，故环路定理的形式不需要发生改变，即

$$\oint_L \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

### 1.29 静电场的能量、能量密度

平行板电容器的静电能等于将电容器充电至一定状态外力所作的功，设某一时刻时电容器带电  $Q$ ，

两极板之间电势差为  $U$ ，则该时刻电容器静电能  $W_e = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$ 。

体积能量密度表示单位体积内存储的能量，定义为  $w_e = \frac{W_e}{V}$ ，当体积足够小时，可表示某点的能量密度。一般地，对于平行板电容器，由于电场均匀分布，各点能量密度一致，有

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 V = \frac{1}{2} DEV$$

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$$

更一般地，某点附近可认为电场均匀、能量密度一致，该点的能量密度等于该点处的电位移在合场强方向上的分量乘以场强大小，即

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

在各向同性线性介质中，“极化场强”  $\mathbf{E}'$  与合场强  $\mathbf{E}$  恰好相反，电位移方向与合场强一致，有电场能量密度  $w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ 。

对于更复杂的情况，空间中的电场能  $W_e = \int_V w_e dV$ 。

## 二、稳恒磁场

### 2.1 电流、电流密度

电流的决定式为  $I = \frac{U}{R}$ ；电流的定义式为  $I = \frac{dQ}{dt}$ ，即单位时间内流过截面的电荷量。

电流密度更详细地描述某点的电流情况，电流密度  $\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{e}_+$ ， $\mathbf{e}_+$  表示正电荷移动的方向。

设某一截面大小为  $S$ ，正电荷穿过截面的法向速度为  $v$ ，单位体积内有  $n$  个正电荷  $qnS$ ，则易得

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{S dl \cdot nq}{dt} = qnvS$$

电流元是一个表征通过极小长度电流的物理量，表示为  $I d\mathbf{l}$ ，是一个矢量。单个点电荷以速度  $\mathbf{v}$  运动产生电流，它的电流元的为

$$I d\mathbf{l} = \frac{q}{dt} d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} q = q\mathbf{v}$$

### 2.2 电源电动势

电源有正负极，电源的外部电路由静电力驱动电荷移动产生。而在电源内部，正电荷的移动方向为从负极到正极，由非静电力驱动，非静电力做功等于将正电荷从正极移到负极的静电力做功  $W$ 。

非静电力做功产生的“势”，即电源的电动势，等于电源把单位正电荷从负极经过电源内移到正极

所作的功，即电源电动势  $\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}$ 。

没有非静电力的作用下，一个闭合回路沿环路不会产生电势差，也就不会有电场，不会有电荷移动，不会有电流。非静电力提供了电动势。在有电源的闭合回路中，非静电力提供了电源电动势；在没有电源但存在电流的闭合回路中，非静电力提供的电动势可以看成是一个等效电源，驱动电荷的移动。

非静电力具有“非静电场”  $\mathbf{E}_k$ 。有电源的闭合回路中，非静电力做功产生的电动势  $\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$ ，电源外部不存在“非静电场”， $\mathbf{E}_k = 0$ ，外部电路由静电场驱动。无电源但有电流的闭合回路中，处处存在“非静电场”，“非静电场”沿环路积分等于电动势。事实上，对于任意闭合回路都有沿回路积分等于电动势，即

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

产生电源电动势的“非静电场”不是保守场。

### 2.3 欧姆定律的微分形式

电阻  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ ，经过该截面某点的电流  $dI = \frac{dU}{R} = \frac{dU}{\rho \frac{dl}{dS}}$ ，整理得

$$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dl}$$

令电导率  $\gamma$  等于电阻率的倒数  $\frac{1}{\rho}$ ，则由上式得  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ 。这就是欧姆定律的微分形式。

### 2.4 磁感应强度、磁场强度

磁感应强度  $\mathbf{B}$ ，地位上等同于电场强度  $\mathbf{E}$ ；磁场强度  $\mathbf{H}$ ，地位上等同于“电感应强度”（电位移矢量） $\mathbf{D}$ 。真空中有

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

其中  $\mu_0$  称为真空磁导率。

事实上，从命名的角度讲， $\mathbf{B}$  应当称为磁场强度，但历史上  $\mathbf{H}$  先出现，该名称已被它占用。磁导率  $\mu_0$  称为“导率”，应当存在它的倒数  $\frac{1}{\mu_0}$ ，与电场中  $\varepsilon_0$  对应。如果追求完全等地位的公式形式的话，可以写成

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

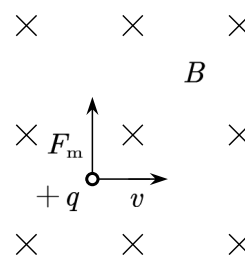
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

我们在磁场中更多地讨论  $\mathbf{B}$ ，正如在电场中更多地讨论  $\mathbf{E}$ ，以强调它们的同地位性。

磁感应强度  $\mathbf{B}$  的定义为  $B = \frac{F_m}{qv}$ ，方向为  $\mathbf{F}_m \times \mathbf{v}$  的方向。

## 2.5 洛伦兹力

磁场中电荷运动会受到垂直于运动方向的磁场力（洛伦兹力）。当运动方向与磁场方向垂直时有  $qvB = F_m$ 。当磁场力提供向心力时有  $qvB = F_n = m \frac{v^2}{R}$ ，整理得  $mv = qBR$ 。



更一般的情况，有

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_m$$

$\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{F}_m$  的方向关系满足左手定则。

## 2.6 安培定律、安培力

单个点电荷产生的电流元  $I d\mathbf{l} = q\mathbf{v}$ ，洛伦兹力可以写成  $\mathbf{F}_m = I_q d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ，其中  $I_q$  表示单个点电荷产生的电流。在一个通有恒定电流  $I$  的导线中，通过横截面积的电荷数量有许多个，对面进行洛伦兹力的积分，该面受到的力则为  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ，再对长度进行积分，则有该导线受到的力

$$\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

这个力称为安培力。

在长为  $L$  的直导线中，显然有安培力  $F = BIL$ ，方向满足左手定则。

## 2.7 磁感应线、磁通量

相对于电场中的电场线和电通量，磁场中有磁感应线和磁通量的概念。与之不同的是，电学中存在正电荷和负电荷，但是磁学中不存在磁单极子。磁感应线是一种无头无尾的“等高线”，磁感应线上各点磁感应强度相同。但相同点是，某点的磁感应线方向和磁感应强度方向一致，正如电场线方向和电场强度方向一样。

磁通量表示穿过某个面积的磁感应强度的累加，通过面积微元  $d\mathbf{S}$  的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

通过一个面  $S$  的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

有  $B = \frac{d\Phi}{dS_\perp}$ ， $S_\perp$  表示面积矢量在磁感应强度方向上的分量，即面积分量的面与磁感应方向垂直。

设单匝线圈的磁通量为  $\Phi$ ，当有  $N$  匝线圈时，总的磁通量为  $N\Phi$ ， $N\Phi$  也称为磁链。



## 2.8 毕奥—萨伐尔定律

规定物理量  $I d\mathbf{l}$  为空间中某点（微元）的电流元。该电流元在以它圆心、 $r$  为半径的垂直于电流元的圆上产生的磁感应强度与  $r$  成反比，即

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

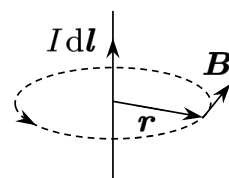
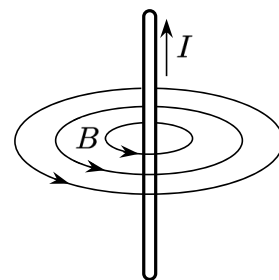
$d\mathbf{B}$  的方向为  $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$  的方向。

空间中某点的磁感应强度等于各电流元产生的磁感应强度在该点的叠加：

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l}}{r^2} \times \hat{\mathbf{r}}$$

对于单个点电荷以速度  $\mathbf{v}$  运动，产生的电流元为  $I d\mathbf{l} = q\mathbf{v}$ ，相应的毕奥—萨伐尔定律可以写成

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{q\mathbf{v}}{r^2} \times \hat{\mathbf{r}}$$



## 2.9 利用毕奥—萨伐尔定律求常见载流导体的磁感应强度

### (1) 载流长直导线

设直导线长为  $L$ ，在  $A$  点的电流元在如图所示的  $P$  点（由  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  和  $d$  确定）产生的磁感应强度为  $d\mathbf{B}$ ，易知直导线各点在此处产生的磁感应强度方向相同。 $A$  点电流元产生的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

又有  $\sin \alpha = \cos \beta$ ， $dl = d(d \tan \beta) = d \frac{1}{\cos^2 \beta} d\beta$ ， $d = \frac{r}{\cos \beta}$ ，对整

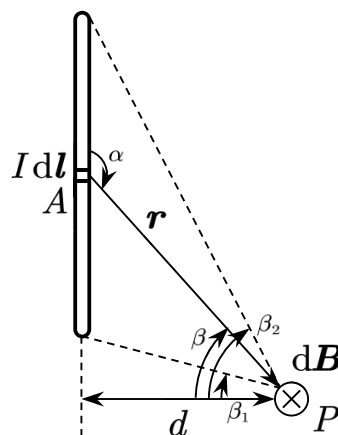
个直导线积分，有

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{I}{d} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

对于无限长直导线，取  $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$ ， $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，有

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

### (2) 载流圆线圈



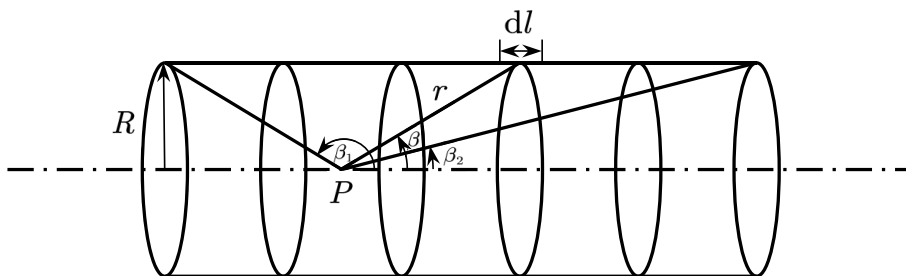
将半径为  $R$  的载流圆线圈上某点电流元在距轴心垂直距离  $d$  处产生的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  沿圆面和轴线方向分解为  $d\mathbf{B}_\tau$  和  $d\mathbf{B}_n$ . 由对称性易知沿载流圆线圈叠加后  $d\mathbf{B}_\tau$  的矢量和为 0.

对于轴线方向的分量, 有  $dB_n = dB \sin \theta = dB \cdot \frac{R}{r}$ , 沿原线圈积分得

$$B = B_n = \int_L dB_n = \int_L \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

其中  $r = \sqrt{R^2 + d^2}$ .

### (3) 载流直螺线管



螺线管上均匀并且密集的缠绕着螺旋形线圈, 线的直径远小于螺线管的长度, 可以将螺线管看成由无数圆线圈积分而成. 设单位长度上的线圈有  $n$  匝, 单匝电流大小为  $I$ , 利用载流圆线圈激发磁场的结论, 则螺线管上某线圈 (由  $\beta$  确定) 在轴线上  $P$  点 (由  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  确定) 激发的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} \cdot n dl$$

其中  $r = \frac{R}{\sin \beta}$ ,  $dl = d(R \cot \beta) = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta$ , 沿螺线管积分得

$$\begin{aligned} B &= \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} \cdot n dl = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(\frac{R}{\sin \beta}\right)^3} \cdot n \frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \\ &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \beta d\beta \\ &= \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \end{aligned}$$

对于无限长螺线管 (或螺线管长度远大于半径  $R$ , 可近似认为无限长), 取  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 0$ , 则轴线上磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2} n I (1 - \cos \pi) = \mu_0 n I$$

结果与  $R$  无关, 即不在轴上的点同样也有  $B = \mu_0 n I$ . 无限长螺线管内部是一个方向平行于轴线的均匀磁场.

在轴线上端点处, 取 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta_2 = 0$ , 有 $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$ .

### 2.10 高斯定理

与静电场中类似, 在恒定磁场中也有通量 $\Phi = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 q_B$ , 其中假设 $q_B$ 为磁单极子在闭合曲面内的净量。但磁学中并不存在磁单极子, 该净量始终等于 0, 故

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

即穿入闭合曲面的磁感应线的条数必然等于穿出闭合曲面的磁感应线条数。

### 2.11 安培环路定理

在磁场中沿任意闭合曲线 $L$ 的 $\mathbf{B}$ 的线积分, 等于 $\mu_0$ 乘以穿过以该闭合曲线为边界的所有曲面的恒定电流总和, 即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

以通有每束电流 $I$ 的 $N$ 束无限长直导线在半径为 $R$ 处产生的磁场, 有 $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$ , 沿环路积分有

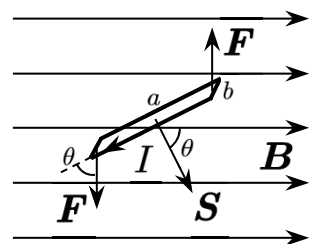
$$\oint_L B dl = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \oint_L dl = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 NI = \mu_0 \sum I$$

需要注意的是, 式中的 $\sum I$ 包括位移电流 (可以理解为“等效电流”), 这在之后会提到。

### 2.12 磁矩、磁力矩

若磁场中有一个面积为 $S = ab$ 的通有恒定电流 $I$ 的 $N$ 匝矩形载流线圈, 如图所示, 则 $b$ 一边受到的安培力 $F = NB Ib$ ,  $a$ 两边受到的安培力是一对平衡力, 所以整个线圈受到的力矩为

$$M = 2|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = 2 \cdot \frac{a}{2} F \sin \theta = NB I ab \sin \theta = NB IS \sin \theta$$



则定义物理量 $\mathbf{m} = NIS$ 为磁矩, 则整个线圈受到的力矩可以写为

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

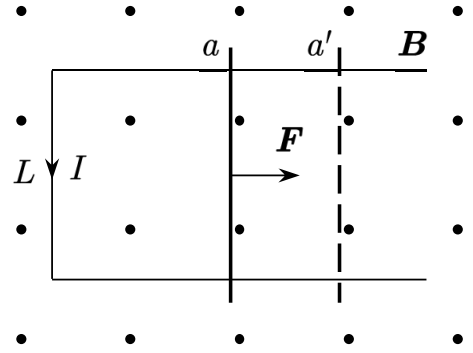
设线圈平面与磁场方向的夹角为 $\varphi$ , 则 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ . 在计算中, 我们更习惯于使用 $M = NBIS \cos \varphi$ .

### 2.13 磁场力做功

设磁场中有面与磁场方向垂直的固定矩形导轨, 如图所示, 上面放一个金属棒 (在导轨中的有效长

度为 $L$ )，金属棒与导轨左侧平行，导轨和金属棒的闭合回路中具有恒定电流 $I$ ，易得金属棒受到的安培力 $F = BIL$ ，金属棒在安培力作用下从距导轨左侧 $a$ 处移动到距导轨左侧 $a'$ 处，磁场力(安培力)所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_a^{a'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = BIL(a' - a) \\ &= BI(La' - La) \\ &= I(BS' - BS) \\ &= I(\Phi' - \Phi) = I\Delta\Phi \end{aligned}$$



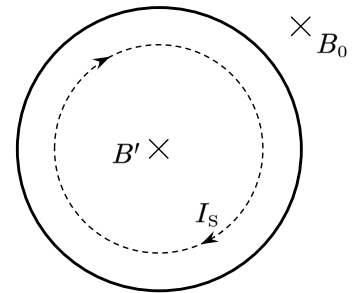
在电流恒定的情况下，安培力分解成与回路平面平行的分量和与磁场方向垂直的分量(不做功)，那么安培力做功就会产生通量的变化，有

$$W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi = I\Delta\Phi$$

## 2.14 磁介质、磁化电流

在磁场 $\mathbf{B}_0$ 中一些物体能够被激发出磁场 $\mathbf{B}'$ 而展现出磁性，这个过程称为磁化，这个物质称为磁介质。磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ 。

$\mathbf{B}'$ 的产生是由于在磁场作用下磁介质内分子会产生面电流，称为磁化电流。以圆柱形磁介质为例，沿着轴线方向施加磁感应强度为 $B_0$ 的磁场，在一个截面上产生如图所示的面电流 $I_s$ 。



定义磁化强度 $\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_{\text{分子}} + \sum \Delta \mathbf{m}_{\text{分子}}}{\Delta V}$ ，即单位体积的磁矩，

$\mathbf{m}_{\text{分子}}$ 表示固有磁矩， $\Delta \mathbf{m}_{\text{分子}}$ 表示附加磁矩。

与静电场中的极化电荷不同，若某磁介质激发的 $\mathbf{B}'$ 具有与 $\mathbf{B}_0$ 方向相同的分量，结果使 $B > B_0$ ，这类磁介质称为顺磁质，具有顺磁性( $\sum \Delta \mathbf{m}_{\text{分子}} = 0$ )；反之，某磁介质激发的 $\mathbf{B}'$ 使得 $B < B_0$ ，这类磁介质称为抗磁质，具有抗磁性( $\sum \mathbf{m}_{\text{分子}} = 0$ )。特殊地，当某磁介质激发的 $\mathbf{B}'$ 使得 $B \gg B_0$ ，这类磁介质称为铁磁质。

对于顺磁质而言，以上述圆柱形磁介质(长 $L$ ，截面面积 $S$ )为例，设单位长度的圆柱截面(切面)上产生的磁化面电流为 $\alpha_s$ ，显然 $I_s = \alpha_s L$ ，则

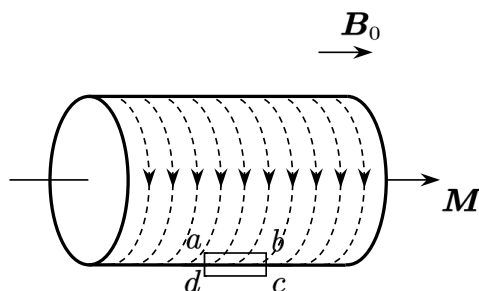
$$\begin{aligned} \sum \mathbf{m}_{\text{分子}} &= I_s \mathbf{S} \\ M &= \frac{|\sum \mathbf{m}_{\text{分子}}|}{V} = \frac{I_s S}{SL} = \frac{I_s}{L} = \alpha_s \end{aligned}$$

推广得，顺磁质某处的磁化强度与该处的面电流线密度相等。

对于更复杂的情况,  $M = \frac{dI_s}{dl}$ , 则有

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_s$$

以如图的闭合回路  $abcd$  为例, 上式表示磁化强度对  $abcd$  回路的线积分, 等于经过以  $abcd$  为边界的任意曲面的总磁化电流。



## 2.15 有磁介质时的磁场强度

有电介质时电场位移矢量满足  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  的方向定义与电场强度方向定义相反, 抵抗  $\mathbf{E}_0$  的作用 ( $\mathbf{P}$  方向为负电荷指向正电荷, 而  $\mathbf{E}_0$  方向为正电荷指向负电荷)。

有磁介质时的磁场强度矢量满足  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}$  的方向定义与磁感应强度方向定义相同,  $\mathbf{M}$  促进  $\mathbf{B}_0$  的作用。

类比静电场中有电介质的情况, 同样地, 定义  $\chi_m = \frac{M}{H}$  为磁化率 (与有电介质的静电场不同, 不是  $\frac{B'}{B}$ ),  $\mu_r = 1 + \chi_m$  为相对磁导率, 定义磁导率  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , 容易得到

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

磁场强度是表征“本真磁感应强度”的物理量, 即

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{H}}{\frac{1}{\mu_0}} = \mu_0 \mathbf{H}$$

## 2.16 有磁介质时的高斯定理

由高斯定理  $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  得, 有磁介质时

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}') \cdot d\mathbf{S} = 0$$

## 2.17 有磁介质时的安培环路定理

由安培环路定理  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I + \sum I_s)$  (此处原电流  $I$  不写作  $I_0$  是因为  $I$  更易于测量) 得

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \\ \oint_L \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \end{aligned}$$

故得有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_L \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

其中  $I$  为通入的电流大小。

### 三、电磁场

#### 3.1 电磁感应

当穿过一个闭合回路所包围的面积磁通量发生变化时，在回路中会产生感应电流（压）。

#### 3.2 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，所引发的磁场方向，总是阻止引起感应电流的磁通量变化。即感应电流的方向试图维持磁通量，这种“维持”以激发它的磁场的变化而可能是“补偿”激发它的磁场或者“反抗”激发它的磁场。

#### 3.3 法拉第电磁感应定律

电磁感应的数学描述为：单匝线圈产生的感应电动势与单匝线圈的磁通量的关系为  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_i}{dt}$ ，其中负号是楞次定律的数学体现。

对于  $N$  匝线圈的情况，有总电动势

$$\mathcal{E} = N\mathcal{E}_i = -\frac{dN\Phi_i}{dt}$$

对于各匝磁通量不一样的情况， $\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_i = -\frac{d\sum \Phi_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 。一段时间内通过导线（单匝）

$$\text{任一截面的感生电荷量为 } q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_i}{dt} dt = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1}{R} d\Phi_i = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

设产生该电动势的非静电场为  $\mathbf{E}$ ，类似地，有

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

#### 3.4 动生电动势

导体回路或者导体在稳定磁场中运动引起的磁通量变化产生的电动势称为动生电动势。有回路才会有感应电流，而感应电压一直存在。这种情况下，可以任意指定一个假想回路来求磁通量的变化量，设磁场中有长为  $L$  的导体棒以  $\mathbf{v}$  的速度移动，导体棒的运动平面垂直于磁感应强度  $\mathbf{B}$ ，则此刻磁通量的变化量  $d\Phi = B dS = BL dt$ ，动生电动势

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = BLv$$

即动生电动势在量值上等于单位时间呢导体棒所切割的磁感应线数。

对于导体棒运动平面不垂直于磁感应强度  $\mathbf{B}$  的情况，各矢量应当为在垂直  $\mathbf{B}$  的面上的投影。

需要注意的是，动生电动势不是静电场中的势能，它所产生的的是非静电场，因此该导体棒可以看作是一个电源，电动势的方向（或者存在回路时电流的方向）是从电源负极指向正极（该导体棒为电源内部）。设非静电场的场强为  $\mathbf{E}_k$ ，则对于单个电子  $q = -e$  有  $q\mathbf{E}_k = \mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，得  $\mathbf{E}_k = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，称为动生电场。自然地，对于单匝导线（即使是多匝，可以将多匝看成单匝，但电流、电场需要进行叠加）

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ \mathcal{E} &= \int_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

当导线（导体棒）运动平面都垂直于  $\mathbf{B}$  时，显然  $\mathcal{E} = BLv$ 。相比于静电场（保守力场）沿环路积分为 0，动生电场不是保守力场。

### 3.5 感生电动势

完全由磁场变化引起的磁通量变化产生的电动势称为感生电动势。由于并无运动，产生感生电动势的非静电力不再是洛伦兹力，产生这种力的电场不同于动生电场，称为感生电场，记为  $\mathbf{E}_i$ 。在磁场变化下静止的闭合回路处处都有感生电场  $\mathbf{E}_i$  的存在。

记单匝闭合回路围成的某个曲面的面为  $\mathbf{S}$ ，在变化的磁场  $\mathbf{B}$  中有  $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB S}{dt} = \frac{dB}{dt} S$ 。则

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \\ \mathcal{E} &= \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

相比于静电场（保守力场）沿环路积分为 0，感生电场不是保守力场。

感生电场又称涡旋电场。

### 3.6 导体在变化的磁场中运动

导体回路在变化的磁场中运动（改变回路围成某曲面的面积的运动），既有动生电动势，也有感生电动势；既有动生电场，也有感生电场。

由定义有，此时单匝导体回路中电动势的大小

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB S}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} S + B \frac{\partial S}{\partial t}$$

其中， $\frac{\partial B}{\partial t} S$  为感生电动势， $B \frac{\partial S}{\partial t}$  为动生电动势。故给出更恰当的定义如下：在磁场中运动的导

体，其产生的电动势为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_k$$

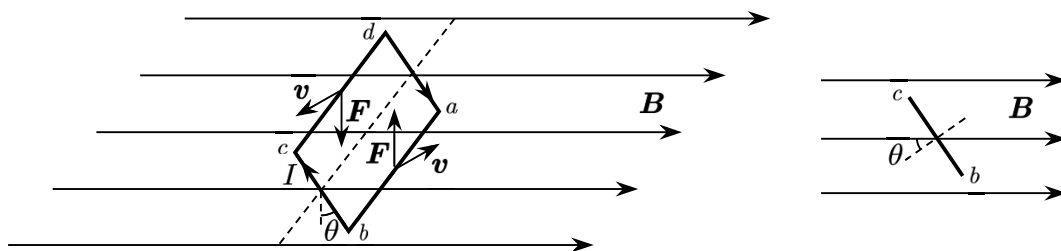
其中

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathcal{E}_k = \int_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

对于未形成回路的运动中的导体,  $\mathbf{S} = 0$ , 但  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$  并不为 0, 即只存在动生电动势。

### 3.7 在磁场中传动的线圈的感应电动势、交变电动势



设磁场中有绕固定轴转动的  $N$  匝线圈 (面积为  $S$ ,  $ab$  边长  $L_1$ ,  $bc$  边长  $L_2$ ) 以恒定角速度  $\omega$  (线速度  $v = \omega \frac{L_2}{2}$ ) 转动, 如图所示, 设线圈面积矢量与磁感应强度  $\mathbf{B}$  的夹角为  $\theta$ , 0 时刻线圈平面与  $\mathbf{B}$  方向垂直, 即  $\theta = 0$ , 当经过  $t$  时刻  $\theta = \omega t$  时, 易知  $ab$  边和  $cd$  边共产生感应电动势

$$\mathcal{E} = 2NBL_1 v_{\text{切割}} = 2NBL_1 \cdot \omega \frac{L_2}{2} \sin\theta = NBS\omega \sin\omega t$$

这是通过动生电动势来求的, 如果从定义出发,  $t$  时刻的磁通量为  $\Phi = BL_1 L_2 \cos\theta = BS \cos\omega t$ , 亦可得感应电动势  $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin\omega t$ .

如上的电动势作周期性变化, 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . 在相邻的半个周期中, 电动势方向相反。这种电动势称为交变电动势。

### 3.8 自感

由奥斯特发生的电流磁效应和毕奥—萨伐尔定律知, 电流会在周围产生磁场。在通有电流的闭合回路中, 闭合回路的电流会在闭合回路周围产生磁场而引起磁通量的变化, 从而在自己的闭合回路中激起感应电动势。这种现象称为自感现象, 相应的电动势称为自感电动势。由楞次定律可知, 自感电动势阻碍闭合回路中原有的电动势。

通有电流为  $I$  的缠绕了  $N$  匝的长直螺线管 (长为  $l$ , 截面半径为  $R$ ,  $l \gg R$ ), 单位长度上的匝数为  $n = \frac{N}{l}$ . 由无限长载流直螺线管内部的磁感应强度为  $B = \mu_0 nI$  可求得每匝线圈内部磁感应强度为  $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$ , 产生的磁链为  $\Phi = N\Phi_i = NBS = N^2 \frac{\mu_0 I}{l} \cdot \pi R^2$ , 感应电动势  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi N^2 R^2}{l} \frac{dI}{dt}$ .



令  $L = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^2}{l}$  为自感系数, 则自感电动势 (正数表示原电动势方向)

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

对于更一般地情况,  $L = \frac{d\Phi}{dI} / \frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}$ .

当回路几何形状不变、周围无铁磁性物质的情况下, 毕奥—萨伐尔指明了空间中任意一点的  $B \propto I$ , 则  $\Phi = BS \propto I$ , 此时  $L = \frac{\Phi}{I}$ .

### 3.9 互感

空间中两个回路相互靠近, 一个回路中电流激发的磁场会引起另一个回路中的磁通量变化, 从而在另一个回路中产生感应电动势, 反之亦然, 这种现象称为互感。

仍然以长直螺线管为例, 两个回路 (螺线管) 共轴, 且长均为  $l$ , 截面半径均为  $R$ ,  $l \gg R$ , 匝数分别为  $N_1$  和  $N_2$ , 所通电流分别为  $I_1$  和  $I_2$ , 则回路 1 和回路 2 的自感系数分别为

$$L_1 = \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} = \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R^2}{l}$$

$$L_2 = \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} = \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R^2}{l}$$

回路 1 在回路 2 产生的磁链

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi_{2i} = N_2 \cdot B_1 S_2 = N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} \pi R^2 = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} I_1$$

同理有回路 2 在回路 1 产生的磁链

$$\Phi_{12} = N_1 \Phi_{1i} = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} I_2$$

则回路 1 在回路 2 产生的互感电动势

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} \frac{dI_1}{dt}$$

回路 2 在回路 1 产生的互感电动势

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} \frac{dI_2}{dt}$$

令  $M = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$  为互感系数, 则

$$\mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

易得  $M^2 = \left( \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R^2}{l} \right)^2 = \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R^2}{l} \cdot \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R^2}{l} = L_1 L_2$ , 则  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

对于更一般的情况,  $M = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2}$ , 一个回路所产生的磁感应线并不像此例中完全通过另一个回路(耦合), 故定义耦合因数 $k$ , 在一般情况下 $M = k\sqrt{L_1L_2}$ .

### 3.10 磁场能

给定一个外接电源(电源电动势为 $\mathcal{E}$ )的闭合回路, 该闭合回路的电流会产生一个磁场 $\mathbf{B}$ , 进而发生自感现象。设 $\Delta t$ 内的某时刻闭合回路中的总电流为 $I$ , 则由欧姆定律有

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$$

电路中电源电动势所做的功为

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta q} \mathcal{E} dq &= \int_0^{\Delta t} \mathcal{E} I dt = \int_0^{\Delta t} IR \cdot I dt + \int_0^{\Delta t} L \frac{dI}{dt} \cdot I dt \\ &= \int_0^{\Delta t} I^2 R dt + \int_0^{\Delta I} LI dI \end{aligned}$$

电流产生磁场, 磁场激发非静电场产生自感电动势, 自感电动势的能量即来自于磁场,

当 $\Delta t$ 很小时, 可近似认为电路中电流恒定(或者当电路电流稳定后),  $\int_0^{\Delta t} \mathcal{E} I dt = I^2 R \Delta t + \frac{1}{2} LI^2$ .

假设不存在自感现象, 电源电动势做功等于电路中静电力做功, 最终都转化为焦耳热 $I^2 R \Delta t$ ; 由于存在自感现象, 电源电动势做功的一部分能量转化为磁场能, 这部分磁场能再转化为引起自感的感生电场能, 值为 $\frac{1}{2} LI^2$ . 由能量守恒定律, 磁场能量为 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ .

若该闭合回路是一个单位长度含 $n$ 匝线圈的螺线管, 则 $L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{nl \cdot \mu_0 n dI \cdot \pi R^2}{dI} = \mu_0 n^2 V$ , 其中 $V$ 表示螺线管的体积,  $I = \frac{B}{\mu_0 n}$ , 则有

$$W_m = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 V) \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2} BHV$$

$$\text{能量密度 } w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH.$$

与静电场的能量类似, 更一般地, 磁场中某点的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$$\text{空间中的磁场能 } W_m = \int_V w_m dV.$$

### 3.11 变化的电场引起磁场、变化的磁场引起电场

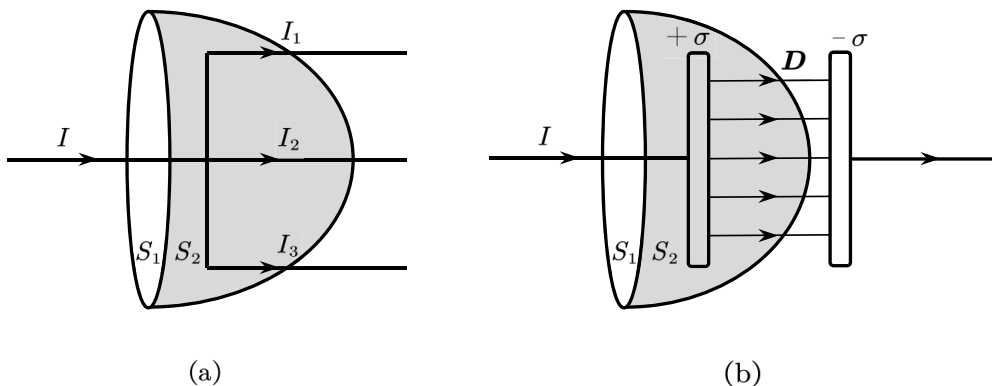
在电场恒定的情况下, 单位时间内通过的电荷数保持不变, 即电流恒定, 根据毕奥—萨伐尔定律, 磁场和电流成正比, 产生的磁场也恒定。

而当电场变化时, 电流也随之变化, 产生的磁场也发生变化。感生电动势的原理(法拉第电磁感应

定律) 揭示了变化的磁场能够引起电场, 进而进行一步影响电场的变化……

### 3.12 位移电流、修正的安培环路定理

先前描述的安培环路定理等只在恒定电流(恒定电场)产生的磁场中有效。这是因为这种情况下电流是“连续”传导的。



例如安培环路定理  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ , 在图(a)的情况下, 对同一个环路  $L$ , 取  $S_1$  面有  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ , 取  $S_2$  面有  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_1 + I_2 + I_3 = I$ , 两者结果是一样的, 这是因为它们的电流传导是连续的, 从而满足电流分流规律。

而在图(b)的情况下, 有一个正在充电的电容器, 取  $S_1$  面有  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ , 取  $S_2$  面有  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 矛盾, 因为电路电流的连续传导在电容器处被阻断。但之所以电流还能“传导”, 是因为电容器两极板之间存在电荷量的变化, 从而可以理解为两极板之间存在等效电流, 我们称为位移电流。

定义  $I_d$  为位移电流, 由电容器极板间场强  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$  得电位移  $D = \epsilon E = \sigma$ . 由电流定义得

$$I = \frac{dQ}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

定义电位移通量  $\Psi = DS$ , 则

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\mathbf{j}_d = \frac{I_d}{S} = \frac{dD}{dt}$$

将位移电流也考虑进安培环路定理对电流的求和中, 则安培环路定理可以写成

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I + I_d) = \sum \left( I + \frac{d\Psi}{dt} \right)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_s (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{S} = \oint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

由于“位移电流”“电位移通量”由麦克斯韦提出并对安培环路定理进行修正，上式又称为麦克斯韦—安培定理。

此时再取 $S_2$ 面， $\sum(I + I_d) = I_d = S \frac{d\sigma}{dt}$ ，它等于电路中的电流，安培定理在取 $S_1$ 面和取 $S_2$ 面是一样的，不存在矛盾。

如果电容器足够大且在充电或者放电（放电过程中 $d\sigma$ 或 $dD$ 是负的，位移电流 $I_d$ 与充电反向），在变化的电场中，由安培环路定理显然也可以求得存在磁场 $\mathbf{H}$ ，这就是变化的电场产生的磁场。

### 3.13 麦克斯韦方程组的积分形式

为了区分自由电荷和非自由电荷，以及由它们产生的各物理量，我们在自由电荷相关的物理量标角标 f 以示区别，英文含义为 free.

麦克斯韦方程组的积分形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f dV \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \frac{d\Psi_D}{dt} = \oint_S \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right.$$

麦克斯韦方程组高度总结了电磁场理论中电场和磁场之间的关系。在“位移电流”这一概念的基础上，麦克斯韦方程组的组成（积分形式）如下：

#### (1) 电场（高斯定理）

将电位移通量对时间的变化率看成一种“等效电流”，那么变化的电位移（电场）也会引起一种假想的电荷变化，且设电荷体密度为 $\rho$ （不包含极化电荷），那么即使在真实不存在电荷的情况下，也有电场中的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_f = \int_V \rho_f dV$$

#### (2) 磁场（高斯磁定理）

磁场中的高斯定理为

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

其中 $\mathbf{B}$ 可以由传导电流、磁化电流、变化电场（位移电流）激发。

#### (3) 变化的磁场激发电场（法拉第电磁感应定律）

法拉第电磁感应定律揭示了这一现象，仅对场进行研究，即使不存在闭合回路，也可以假想空间中存在一个环路 $L$ ，研究对象为该环路上的电场强度、该环路围成曲面各点的磁场强度，环路是固定的，不存在面积的变化。定律表述为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

#### (4) 变化的电场激发磁场（麦克斯韦—安培定理）

麦克斯韦修正后的安培环路定理揭示了这一现象，定理表述为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I_f + I_d) = \oint_S \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

### 3.14 麦克斯韦方程组的微分形式

通过数学上的一些变换，我们可以将麦克斯韦方程组写作

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \end{array} \right.$$

## 四、近代物理